Online Journal of Mathematics, Science and Technology Education (OJOMSTE)

Vol:1 No:1 Year:2020

journal homepage: https://www.ojomste.com/index.php/1

Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebirsel İspat Yapabilme Durumlarının İncelenmesi[*]

Aysun Yeşilyurt Çetin[a], Ramazan Dikici[b]

[a] *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Erzurum/Türkiye.* *aysun.yesilyurt@atauni.edu.tr*, *https://orcid.org/0000-0002-0344-231X*

[b] *Mersin Üniversitesi, Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Mersin/Türkiye,* *rdikici@mersin.edu.tr*, *https://orcid.org/0000-0003-1903-9418*

[*] *Bu araştırma 18-22 Nisan 2018 tarihinde Antalya'da düzenlenen 27. Uluslararası Eğitim Bilimleri Kongresi'nde sözlü bildiri olarak sunulmuştur.*

Anahtar Kelimeler:

Cebirsel ispat,

matematiksel ispat,

ispat yapabilme

Makale Türü:

Araştırma

Öz

Matematik öğretmeni adaylarının cebirsel bir ispatı yapabilme durumlarının incelenerek öğretmen adaylarının cebirsel bir ispatı oluşturma sürecinde yaşadıkları zorlukların belirlenmesinin amaçlandığı bu araştırmada; durum çalışması deseni kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının ispat yapma süreçleri video kayıt altına alınmıştır. 5 matematik öğretmeni adayının gönüllü olarak dâhil oldukları bu araştırmada her biri ortalama on beş dakika süren uygulamalar araştırmacılar tarafından video kayıt altına alınarak betimsel analiz yöntemiyle analiz edilmiştir. Elde edilen bulgular ışığında öğretmen adaylarının bir ispatı oluşturma sürecinde ispata başlayamama, ispat içerisinde hangi özelliği ve tanımı kullanması gerektiğini bildiği halde bu özelliği ve tanımı ispatı oluştururken kullanamama gibi zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir.

Yeşilyurt Çetin, A., & Dikici, R. (2020). Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebirsel İspat Yapabilme Durumlarının İncelenmesi. *Online Journal of Mathematics, Science and Technology Education (OJOMSTE),* 1(1), 75– 85.

Online Journal of Mathematics, Science and Technology Education (OJOMSTE)

Vol:1 No:1 Year:2020

journal homepage: https://www.ojomste.com/index.php/1

Examination of Pre-Service Mathematics Teachers' Ability to Make Algebraic Proof*

Aysun Yeşilyurt Çetin[a], *Ramazan Dikici*[b]

[a] *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Erzurum/Türkiye.* *aysun.yesilyurt@atauni.edu.tr*, *https://orcid.org/0000-0002-0344-231X*

[b] *Mersin Üniversitesi, Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Mersin/Türkiye,* *rdikici@mersin.edu.tr*, *https://orcid.org/0000-0003-1903-9418*

It was presented as a verbal presentation at the 27th International Educational Sciences Congress held in Antalya on 18-22 April 2018.

Keywords:

Algebraic Proof,

mathematical proof,

proving

Paper Type:

Research

Abstract

In this study, it was aimed to determine the difficulties they faced in the process of creating an algebraic proof by examining the situation of prospective mathematics teachers to make an algebraic proof. The case study design was used in this study. 5 prospective mathematics teachers were included voluntarily in the study. The proving process of the participants was recorded by video. The implemantations, each lasting an average of fifteen minutes, were videotaped by the researchers and analyzed by descriptive analysis. In the light of the findings obtained, it was determined that the prospective mathematics teachers had difficulties such as not being able to start the proof in the process of creating a proof, not being able to use this feature and definition while creating the proof even though they know which feature and definition to use in the proof.

Yeşilyurt Çetin, A., & Dikici, R. (2020). Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebirsel İspat Yapabilme Durumlarının İncelenmesi. *Online Journal of Mathematics, Science and Technology Education (OJOMSTE),* 1(1), 75– 85.

Giriş

İspatlama, kural ve ölçütleri belli, 'mantıksal akıl yürütme' diyebileceğimiz bir akıl yürütmedir (Yıldırım, 2015). Ancak ispatın matematikteki rolü yalnızca akıl yürüterek teoremlerin doğruluğunu göstermek değildir (İpek, 2010). En iyi ispat; yalnızca doğruluğu değil aynı zamanda neden doğru olduğu da gösterilerek teoremin ispatlanma gerekçelerini anlamamıza yardım eden ispattır (Hanna, 2000).

İspat kavramı, matematiksel düşünme becerilerinin gelişiminde ve matematiksel bilgilerin oluşumunda önemli bir role sahiptir (Dede ve Karakuş, 2014). Matematiksel ispat; matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunun mantıksal bir açıklamasıdır (Altıparmak ve Öziş, 2005). Özel olarak cebirsel ispatta değişkene değer vermeden matematiksel geçerliğe sahip bir yolla matematiksel ifadenin ispatlanması söz konusudur ve dolayısıyla her ispatın cebirsel bir parçası vardır (Arslan ve Yıldız, 2010).

Matematik öğretmenlerinin derslerini etkili bir şekilde yapılandırabilmeleri için, kazandıracakları kavramın nereden geldiğini, hangi matematiksel bilgi veya ilke üzerine kurulu olduğunu bilmeleri gerekmektedir. Bunun için de matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapma yönüyle donanımlı yetiştirilmeleri gerekmektedir (Güler, 2013). Matematik eğitimindeki önemli ancak en çok sorun yaratan öğrenme alanlarından biri de cebirdir (Akkuş İspir ve Palabıyık, 2011). Birçok yetişkin cebirin ortaokul veya lise öğrencilerine daha uygun bir matematik alanı olduğunu düşünse de, küçük çocuklar bile sayılar ve işlemlerle çalışarak, örüntüleri ve sayı kümeleri arasındaki bağıntıları inceleyerek cebirsel akıl yürütmeyi kullanmaya teşvik edilebilirler (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Cebirsel ifadelerin ispat edilmesi öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini geliştirir (İpek, 2010). Dolayısıyla ispat öğretimine sadece ileri düzey matematik derslerinde değil, her düzeydeki matematik konuları kapsamında yer verilmesi ve öğrencilerin ispatla ilgili kavramsal bilgiye sahip olmaları ve ispatlama becerisi kazanmaları önemlidir (Sarı, 2011). Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklaması, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtmesi ve ispat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapması beklenen (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013) öğrencileri yetiştirecek olan matematik öğretmenlerinin de bu konuda üst düzey bilgi ve becerilere sahip olmaları ve derslerini öğrencilerine bu becerileri kazandıracak şekilde yapılandırmaları gerekmektedir.

Bu bilgiler ışığında matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ispatları yapabilme durumlarının ortaya çıkarılmasının, cebirsel bir ispatı oluşturma sürecinde yaşadıkları zorlukların belirlenmesinin ve bu zorlukların giderilmesine yönelik bir öğretim programı hazırlanmasının meslek hayatlarındaki matematik öğretim süreçlerinin iyileştirilmesine katkı sağlayacağı öngörülmektedir.

Matematik öğretmeni adayları lisans öğrenimleri süresince cebir dersleri almaktadırlar. Bu derslerde de pek çok teorem ve ispatına yer verilmektedir. Dolayısıyla matematik öğretmeni adaylarının cebir alanında ispat yapabilme durumlarının belirlenmesi önem arz etmektedir. Bu araştırmada matematik öğretmeni adaylarının cebirsel bir ispatı yapabilme durumlarının incelenmesi ve dolayısıyla öğretmen adaylarının cebirsel bir ispatı oluşturma sürecinde yaşadıkları zorlukların belirlenmesi amaçlanmaktadır. Bu bağlamda öğretmen adaylarının ispatı oluşturma süreçlerinin açığa çıkarılmasının ve ispatı tamamlayamama nedenlerinin tespit edilmesi beklenmektedir. Araştırma, öğretmen adaylarının cebirsel ispat yapma sürecine ışık tutması ve ispat yapabilme durumlarının ortaya çıkarılabilmesi açısından önemlidir.

Bu çalışmada 'Matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ispatları yapabilme durumları nasıldır ve cebirsel ispatları yapma sürecinde yaşadıkları zorluklar nelerdir?' sorusuna cevap aranmıştır.

Yöntem

Bu araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseninin kullanılmıştır. Durum çalışması, sınırlı bir sistemin derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesidir ayrıca araştırılmak istenen olgu, özünde sınırlı olmalıdır (Merriam, 2009/2013). Bu araştırma; araştırmaya katılan 5 öğretmen adayı, cebir konuları ve uygulamalarda kullanılan teoremlerin ispatları ile sınırlandırıldığı ayrıca öğretmen adaylarının cebirsel ispat yapabilme süreçlerini derinlemesine betimleyerek incelediği için bir durum çalışmasıdır.

Katılımcılar

Bu araştırmada 5 öğretmen adayının cebirsel ispat yapabilme durumları ele alınmıştır. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi I-II derslerini alarak belirli bir hazırbulunuşluk düzeyine sahip ve dolayısıyla zengin veri sağlayabilecek katılımcılar, gönüllülük esasıyla araştırmaya dahil edilmişlerdir. Önceden belirlenmiş ölçütleri karşılayan bireylerle çalışıldığı için araştırmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Uygulamalar öncesinde, katılımcılara görüşmelerin video kayıt altına alınacağı ancak kişisel bilgilerinin korunacağının teminatını veren bir gönüllülük sözleşmesi okutularak imzalatılmıştır. Çalışmada katılımcılar için kullanılan isimler araştırmacılar tarafından verilen takma isimlerdir.

Veri Toplama Aracı

Bu araştırmada 'Matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ispatları yapabilme durumları nasıldır ve cebirsel ispatları yapma sürecinde yaşadıkları zorluklar nelerdir?' sorusuna cevap bulabilmek için hazırlanan veri toplama aracı ile öğretmen adaylarının ispat yapma durumları incelenmiştir. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi I-II derslerinin içerikleri ve öğrenci ders notları araştırmacılar tarafından incelenerek Cebir alanında uzman üç öğretim elemanının görüşleri doğrultusunda belirlenen beş teorem uygulamada kullanılmıştır. Bu teoremler Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi dersinin içeriği esas alınarak seçilmiştir. Araştırmada nitel veri toplama araçlarından görüşme kullanılmış ve bu bağlamda sesli düşünme yöntemi ile desteklenmiş yarı yapılandırılmış mülakat tekniğinden faydalanılmıştır. Yarı yapılandırılmış mülakatlar, hem sabit seçenekli cevaplamayı hem de ilgili alanda derinlemesine gidebilmeyi birleştirir ve görüşülene kendini ifade etme imkânı verme, gerektiğinde derinlemesine bilgi sağlama gibi avantajlara sahiptir (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2010).

Sesli düşünme, ispat yapma aşamasında izlenilen yol ve yöntemlerin, yaşanılan zorlukların ve yapılan hataların açıklığa kavuşturulmasına yardım etmektedir (Yeşilyurt Çetin, 2017). Bu araştırmada da matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ispatları yaparken izledikleri yol ve yöntemleri, yaptıkları hataları ve yaşadıkları zorlukları açıklığa kavuşturabilmek amacıyla öğretmen adaylarından uygulama sırasında düşüncelerini sesli olarak ifade etmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının belirlenen teorem ispatlarını yapma süreçleri video kayıt altına alınmıştır. Uygulamalar sırasında düşüncelerini sesli olarak ifade etmeye ara veren katılımcılara düşüncelerini sesli olarak ifade etmeleri gerektiği hatırlatılmıştır. Ayrıca uygulama sırasında öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini daha net ortaya çıkarabilmek ve zengin veri elde edebilmek amacıyla da sorular sorulmuştur. Her bir öğretmen adayı ile yapılan görüşme ortalama on beş dakika sürmüştür. Cebir alanında uzman üç öğretim elemanının görüşleri doğrultusunda belirlenen ve uygulamalarda kullanılan teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem.1: $(G,.)$ bir grup ve $N \lhd G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

Teorem.2: $(G,.)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için, $Ha = \{x \in G: a \equiv x(mod\, H)\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.

Teorem.3: Bir $(G,.)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

Teorem.4: Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.

Teorem.5: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı $\varphi_a: G \to G, G$ nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

Veri Analizi

Durum çalışması deseninde elde edilen veriler analiz edilirken alt problemler önemli bir işleve sahiptir. Veriler, alt problemler temel alınarak düzenlenip, yorumlanabilir. Ayrıca verilerin analiz edilmesi ve yorumlanmasında, araştırmacı çalıştığı problemle ilgili alanyazını etkili bir şekilde kullanmalıdır. İlgili alanyazından alıntılar yapmak, yorumların başka araştırma sonuçlarıyla ne derece uyuştuğu veya çeliştiği konusunda tartışmalar açmak, veri analizini ve yorumlamayı zenginleştirir (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

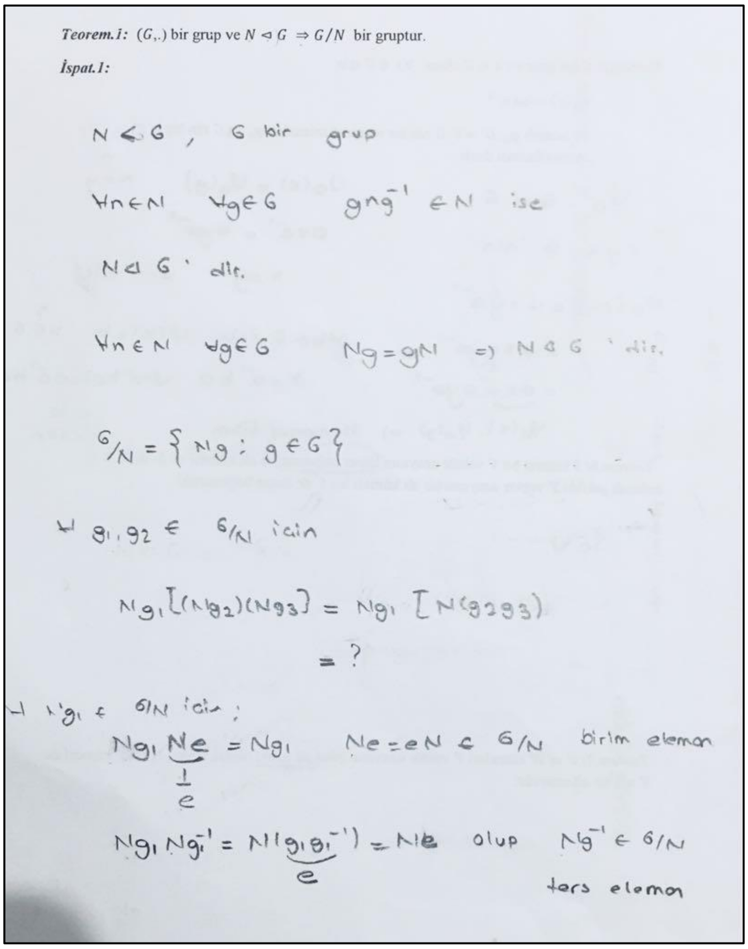
Bu çalışmada araştırmacılar elde ettikleri verileri araştırmanın problemini esas alarak düzenlemiş ve ilgili alanyazınla ne derece uyuştuğu veya çeliştiğini araştırarak yorumlamışlardır. Araştırma sonucunda elde edilen veriler betimsel analiz yöntemiyle analiz edilmiş ve detaylı bir anlatımla okuyucuya sunulmuştur. Betimsel analizde amaç; elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış bir şekilde ortaya koymaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Görüşmeler, araştırmacılar tarafından bütüncül bir yaklaşımla analiz edilmiş ve yorumlanmıştır.

Bulgular

Bu başlık altında matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ispatları yapabilme durumlarına ve ispat oluşturma sürecinde yaşadıkları zorluklara yönelik bulgu ve yorumlar aktarılmıştır. Uygulamada kullanılan her bir sorunun analizi ve yorumu ayrı ayrı ele alınmış ve öğretmen adaylarının cebirsel ispat yapma süreçlerine yönelik örnekler aktarılmıştır.

Uygulamada kullanılan teoremler araştırmaya dâhil olan katılımcıların Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi derslerinin ders içerikleri esas alınarak hazırlanmış olmasına rağmen öğretmen adaylarının cebirsel ispat yapabilme durumlarının beklenen düzeyde olmadığı tespit edilmiştir. 1. Teoremin ispatını yalnız Eylül kısmen de olsa tamamlayabilmiş, burada normal alt grup tanımını bölüm grubu ile ilgili işlemlere yansıtamadığı için grup olma şartlarından birleşme ve birim eleman özelliklerinin varlığını beklenen düzeyde gösterememiştir. Normal alt grup tanımını kullanmayan Gözde ise bölüm grubunun ne olduğunu hatırlayamadığı için ispatı tamamlayamayacağını ifade etmiştir. Beste de bölüm grubunu doğru ifade etse de; normal alt grup ile bölüm grubu arasında ilişki kuramadığından yani normal alt gruptan bölüm grubuna nasıl geçeceğini bilemediğinden ispatı yapamadığını ifade etmiştir. Ayşe, her ne kadar grup olma özelliklerini sözel olarak ifade etse de normal alt grup özelliklerini hatırlayamadığı için ispatı yapamayacağını ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarından Eylül'ün 1. Teoremin ispatına yönelik çözümü Şekil 1'deki gibidir.



Teorem.1: $(G,.)$ bir grup ve $N \lhd G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

İspat.1:

$N \leq G$, G bir grup

$\forall n \in N$ $\forall g \in G$ $gng^{-1} \in N$ ise

$N \lhd G$ ' dir.

$\forall n \in N$ $\forall g \in G$ $Ng = gN \Rightarrow N \lhd G$ ' dir.

$G/N = \{ Ng : g \in G \}$

$\forall$ $g_1, g_2 \in G/N$ için

$Ng_1[(Ng_2)(Ng_3)] = Ng_1[N(g_2g_3)]$

$= ?$

$\forall$ $Ng_1 \in G/N$ için ;

$Ng_1 \underbrace{Ne}_{1 \atop e} = Ng_1$ $Ne = eN \in G/N$ birim eleman

$Ng_1 Ng_1^{-1} = N(\underbrace{g_1g_1^{-1}}_{e}) = Ne$ olup $Ng^{-1} \in G/N$

ters eleman

Şekil 1. Eylül'ün 1. Teoremin ispatına yönelik çözümü

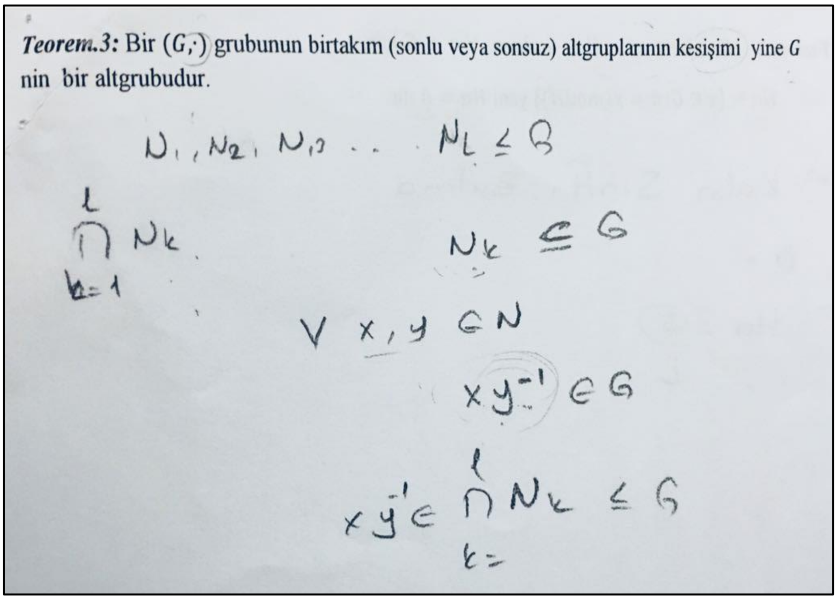
2\. Teoremi ispatlama durumları incelendiğinde hiçbir öğretmen adayının bu teoremin ispatına başlayamadığı ve dolayısıyla ispatı tamamlayamadığı görülmüştür. Öğretmen adaylarından Beste teoremin ifadesini okuduktan sonra düşünmeye başlamış, mülakatçının '*Ne düşünüyorsun şu an?*' sorusundan sonra '*(Gülerek) Şu an soruyu anlamaya çalışıyorum. Yan küme değil mi Hocam? (Teorem ifadesini tekrar okuyor) O zamaan şimdii a-x sıfır desem mod H ('*$a - x \equiv 0\ (H)$*' yazdı). H böler a-x desem Alt grubu H ın bir katı olacak ('*$H/a - x = Hk$*' yazdı). Iıı yok çıkmıyor.*' şeklinde düşüncelerini sesli olarak ifade etmiş ve ispata devam etmemiştir.

3\. Teoremin ispatını öğretmen adaylarından Hakan ve Gözde sözel olarak ifade etmiş olmasına rağmen beklenen düzeyde ispatı yapamamışlardır. Ayrıca Hakan, sonlu gruplarda ispatı yapmaya çalışmış, elemanları doğru kümeden seçmiş, alt grup ve kesişimin tanımlarını doğru kullanmış olmasına rağmen ispatı matematiksel notasyona uygun olarak yazamamıştır. Diğer öğretmen adayları bu teoremin ispatını yapamamışlardır. Eylül teoremin ifadesini matematiksel notasyonla yazmaya çalışmış ancak $\bigcap_{i \in H} H_i$ şeklinde hatalı bir ifade kullanmıştır. Beste teoremi her ne kadar örnekle ispatlayamayacağını ifade etse de, ispatı örnekle açıklamaya çalışmış ancak başarılı olamamıştır. Ayşe ise teoremin ifadesini anlamasına ve alt grup olma şartlarını yazmasına rağmen ispatı yapamamıştır.

Öğretmen adaylarından Gözde'nin 3. Teoremi ispatlama sürecinin video kaydının transkripti şu şekildedir:

'$N_1, N_2, N_3, \dots, N_l \leq G$ olsun. Burda bunların hani kesişim kümesi şöyle; k olsun k eşittir şuraya n diyelim ya da l diyelim (hangi indisleri kullanacağına karar veriyor). k=1 den l ye kadar (Burada mülakatçının 'sonlu mu seçiyorsun? sorusu üzerine 'yok hocam sonlu olmuyor aslında, sonlu veya sonsuz diyor zaten burada, ıı evet sonlu oluyor bu (gülerek)' diyerek ispata devam etmiştir.) N_k'ya k ya ('$\bigcap_{k=1}^{l} N_k$' yazdı) bu kesişim kümeleri olur. Bi kere hocam alt grup olma şartları neydi? Iıı Bi kere kümenin öncelikle G nin bir alt kümesi olması gerekiyordu. Bu N_k'ların alt küme G (' $N_k \subseteq G$' yazdı) olması gerekiyo. Bi de bu işleme göre, şu işleme göre (teorem ifadesinde geçen $(G,.)$ daki işlemi göstererek) N lerden seçeceğimiz (N_k daki N yi göstererek) x ve y elemanları için her x ve y elemanları için ($\forall x, y \in N$ yazdı) x çarpı y üssü şöyle y nin tersinin G nin elemanı olması gerekiyordu ('$x.y^{-1} \in G$' yazdı) iki tane şartımız vardı. Burda hocam tek biri için hani şunu ('$x.y^{-1}$' i göstererek) yazarsak zaten şöyle x_1x_2 diye seçersek bi tanesinin... Nasıl anlatayım ben size? Bu eleman ('$x.y^{-1}$'yi göstererek) hepsinde kesişim olduğu için hepsinin elemanı olacağından xy eleman şey y üssü eleman şunu ('$\bigcap_{k=1}^{l} N_k$' yi göstererek) söyleyebiliriz ('$x.y^{-1} \in \bigcap_{k=}^{l} N_k$' yazdı) Burdan da kesişimleri de alt grup olur ('$x.y^{-1} \in \bigcap_{k=}^{l} N_k \;\leq G'$ yazdı).

Şekil 2'de Gözde'nin 3. Teoremin ispatına yönelik çözümü verilmiştir.



Şekil 2. Gözde'nin 3. Teoremin ispatına yönelik çözümü

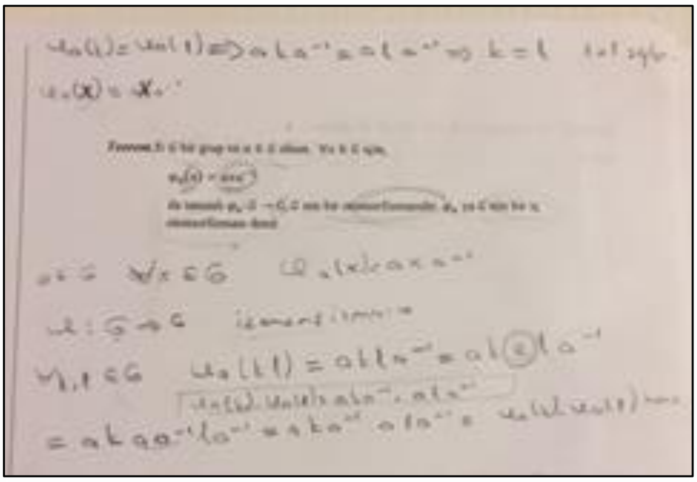
Görüldüğü gibi Gözde teoremin ifadesini doğru anlamış, ispatı sözel olarak doğru ifade etmiş ancak matematiksel yazıma uygun bir şekilde yazamamıştır. Burada alt grup olma şartını yanlış bildiğini düşündüren '$x.y^{-1} \in G$' ifadesini sonraki '*Bu eleman ('$x.y^{-1}$'yi göstererek) hepsinde kesişim olduğu için hepsinin elemanı olacağından xy eleman şey y üssü eleman şunu ('$\bigcap_{k=1}^{l} N_k$' yi göstererek) söyleyebiliriz ('$x.y^{-1} \in \bigcap_{k=}^{l} N_k$' yazdı) Burdan da kesişimleri de alt grup olur ('$x.y^{-1} \in \bigcap_{k=}^{l} N_k \;\leq G'$ yazdı)*' ifadeleri ve yazımıyla düzeltmiştir. Dolayısıyla Gözde bu teoremin ispatını sözel olarak doğru ifade etmiş ancak matematiksel yazıma uygun bir biçimde yazamamıştır.

4. Teoremi ispatlama durumları incelendiğinde öğretmen adaylarının devirli grup tanımını bilmeleri ve sözel olarak ifade edebilmelerine rağmen bu teoremin ispatına başlayamadıkları görülmüştür. Beste teoremin ispatına yönelik ezbere dayalı birtakım bilgilerinin olduğunu ifade etmiş ancak bu bilgileri mantıksal olarak yorumlayamadığı için ispatı yapamamıştır. Öğretmen adaylarından Hakan'ın '*(...) mesela şunu kabul etsek, G nin üreteci g_1 ('$G = < g_1 >$' yazdı)*

şeklinde bir kabulümüz olsa. Eğer G devirli bir grupsa bütün elemanları g_1 cinsinden yazmamız gerekiyor. Yani toplamsal ya da çarpımsal bir grup olduğunu söylememiş ama (düşünüyor) buna sonra tekrar baksam… (uygulama bittikten sonra bu teoreme tekrar dönüyor) (sessizce düşündüğü için mülakatçı 'Ne düşünüyorsun?' diyerek sesli düşünmesini hatırlatıyor) Ya burda tam olarak göstermek istediğimiz şey şu hani tek bir üreteç tarafından üretilecek olması ama şunu tam anlayamadım yani G hakkında bir bilgi de yok toplamsaldır çarpımsaldır diye... Meselâ toplamsal olsaydı işte ng_1 şeklinde gidecekti elemanlar meselâ hani g_1 i üreteç olarak kabul ettiğimizde. Eğer çarpımsal olsaydı ${g_1}^n$şeklinde olacaktı.' cümlelerinden de anlaşıldığı gibi Hakan devirli grup tanımını ifade edebilmektedir ancak bu teoremin ispatında herhangi bir grup işlemine gerek olmamasına rağmen grup işlemi verilmediğinden ispatı yapamadığını düşünmektedir.

5. Teoremin ispatında öğretmen adaylarının homomorfizma ve izomorfizma olma şartlarını bilmeleri ve grupta birim eleman ve birleşme özelliklerini kullanarak homomorfizmaya yönelik işlemleri yapabilmeleri ayrıca birebir ve örten olmayı gösterebilmeleri gerekmektedir. Otomorfizma olma şartını ifade eden Beste iç otomorfizmayı algılayamadığını ve $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ yı nasıl kullanacağını bilemediğini ifade etmiştir. Gözde, otomorfizmayı bildiğini ancak iç otomorfizmayı bilmediğini ifade etmiş ancak sonrasında otomorfizma şartlarını da ifade edememiştir. Elemanları doğru seçmesine ve homorfizma olma şartını bilmesine rağmen homomorfizma olma şartına yönelik işlemleri yapamamıştır. Eylül, elemanları doğru seçmiş, soruyu hatırladığını ifade etmiş ve homomorfizma olduğunu göstermiş ancak örten olma şartını yazılı olarak ifade ettiği halde mantıksal bir çıkarım yapamamış ve örten olma durumunu beklenen düzeyde gösterememiş ve iç otomorfizmaya yönelik de herhangi bir ifade kullanmamıştır. Dolayısıyla Eylül 5. Teoremin ispatını beklenen düzeyde tamamlayamamıştır. Öğretmen adaylarından Hakan, otomorfizma ve iç otomorfizmayı doğru bir biçimde ifade etmiştir. Elemanları doğru seçmiş homomorfizma olma şartına yönelik işlemleri yapabilmiş ve birebirliği de göstermiştir. Ancak örten olmanın ne olduğunu bilmesine rağmen örten olduğunun gösterilmesine yönelik ispat adımını yapamamıştır. Ayşe ise homomorfizma, izomorfizma ve otomorfizma şartlarını bilmesine, homomorfizma olma şartına ve birebir olmasına yönelik işlemleri yapabilmesine rağmen örten olduğuna yönelik ispat adımını yapamadığı için ispatı tamamlayamamıştır. Ayrıca Ayşe, Eylül ve Hakan grupta birim eleman ve birleşme özelliklerini kullanmalarına rağmen birleşme özelliğini sözlü olarak ifade etmemiş ve matematiksel notasyona uygun bir biçimde yazmamışlardır.

Şekil 3'te Ayşe'nin 5. Teoremin ispatına yönelik çözümü verilmiştir.



Şekil 3. Ayşe'nin 5. Teoremin ispatına yönelik çözümü

Öğretmen adaylarının cebirsel ispatları yapabilme durumlarına yönelik bulgular Tablo 1'de bütüncül bir yaklaşımla sunulmuştur.

Tablo 1. Matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ispatları yapabilme durumları

Teorem	Ayşe	Beste	Gözde	Eylül	Hakan
1. Teorem İspatı	Yapamadı	Yapamadı	Yapamadı	Kısmen yapabildi ancak tamamlayamadı	Yapamadı
2. Teorem İspatı	Yapamadı	Yapamadı	Yapamadı	Yapamadı	Yapamadı
3. Teorem İspatı	Yapamadı	Yapamadı	Sözel olarak ifade etti ancak beklenen düzeyde ispatı yapamadı	Yapamadı	Sözel olarak ifade etti ancak beklenen düzeyde ispatı yapamadı
4. Teorem İspatı	Yapamadı	Yapamadı	Yapamadı	Yapamadı	Yapamadı
5. Teorem İspatı	Kısmen yapabildi ancak tamamlayamadı	Yapamadı	Yapamadı	Kısmen yapabildi ancak tamamlayamadı	Kısmen yapabildi ancak tamamlayamadı

Tablo 1'den de görüldüğü gibi öğretmen adaylarından Beste hiçbir cebirsel ispatı yapamamış; Ayşe ve Gözde bir, Hakan ve Eylül ise iki cebirsel ispatı beklenen düzeyde olmasa da kısmen yapabilmiştir.

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu araştırmaya göre matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ispatları yapabilme durumları ispata yönelik önceki bilgilerin eksikliği, var olan bilgileri ispata uygun bir biçimde kullanıp kullanamama, matematiksel dil ve notasyon bilgisi gibi birçok sebeple ilişkilidir.

Öğretmen adayları genel olarak ya ispata başlayamamış ya da başladıkları bir ispatı beklenen düzeyde tamamlayamamışlardır. Öğretmen adayları cebirsel bir ispatı yapma sürecinde hem önceki bilgilerin eksikliğinden hem de mevcut bilgilerin ispata yönelik kullanılamamasından kaynaklanan sorunlar yaşamaktadırlar. Bu araştırmadan elde edilen bulgulara göre, bazı öğretmen adayları, grup olma şartlarını bilmelerine rağmen normal alt grup özelliklerini hatırlayamadıkları için bazıları da normal alt grup tanımını bölüm grubu ile ilgili işlemlere yansıtamadığı için birinci teoremi ispatlayamamışlardır. Bir öğretmen adayı ise hem normal alt grubun hem bölüm grubunun hem de grup özelliklerinin ne olduğunu bilmesine rağmen grup özelliklerini kullanarak bölüm grubunun bir grup olduğunu gösterememiştir. Beşinci teoremde üç öğretmen adayı örten olmanın ne olduğunu ifade etmelerine rağmen örten olduğunun gösterilmesine yönelik işlem basamaklarını; bir öğretmen adayı ise homomorfizmayı bilmesine rağmen homomorfizma olduğunun gösterilmesine yönelik işlem basamaklarını yapamamışlardır. Dolayısıyla bir cebirsel ispatın oluşturulmasında ispatla ilgili tanım ve özellikleri yalnızca bilmek değil aynı zamanda ispatın amacına yönelik bu tanım ve özellikleri kullanabilmek de önemlidir. Öğretmen adayları ayrıca devir grubunun tanımını ifade ettikleri ve teoremin ifadesini anladıkları halde dördüncü teoremde ispata nasıl ve nereden başlayacaklarını bilememişlerdir. Benzer şekilde öğretmen adayları ikinci teoremde teoremin ifadesinden yola çıkmışlar ancak teoremi anlasalar bile ispata başlayamamışlardır. Üçüncü teoremin ispatını öğretmen adaylarından ikisi sözel olarak ifade etmiş olmasına rağmen matematiksel dil ve notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle beklenen düzeyde ispatı yapamamışlardır. Öğretmen adayları cebirsel ispat sürecinde ispata başlayamamanın yanı sıra matematiksel dil ve notasyon bilgisiyle ilgili de zorluk yaşamışlardır. Elde edilen bu sonuçlar

Moore'un (1990), Güler'in (2013) ve Polat ve Akgün'ün (2016) çalışmalarıyla da benzerlik göstermektedir. Ceylan'a (2012) göre; öğretmen adaylarının ispat sürecinde örneklerden yararlanmaları onların yeterli mantıksal çıkarımlara sahip olmadıkları anlamına gelebilmektedir. Benzer olarak bu çalışmada da üçüncü teoremin ispatında örnekten yararlanmaya çalışan Beste, dördüncü teoremin ispatında mantıksal bir çıkarım yapamamış ve ezbere dayalı ifadeler kullanmıştır. Güler (2013) araştırmasında öğretmen adaylarının birleşme özelliğinin, birim eleman özelliğinin ve ters eleman özelliğinin ne anlam ifade ettiğini bilmediklerini ortaya koymuştur. Ancak bu araştırmada öğretmen adaylarının bu özellikleri bilmelerine rağmen ispata yönelik işlemlerde beklenen düzeyde kullanamadıkları ve dolayısıyla ispatı tamamlayamadıkları görülmüştür.

Bu araştırmaya göre, öğretmen adayları cebir alanında bir teoremin ispatını yaparken pek çok zorluk yaşamaktadırlar. Bu zorluklardan bazıları; ispata başlayamama, teoremin ifadesini anlayamama, ispat içerisinde hangi özelliği ve tanımı kullanması gerektiğini bildiği halde bu özelliği ve tanımı ispatı oluştururken kullanamama, önceki bilgilerin eksik ya da yanlış olması, matematiksel dil ve notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle matematiksel yazımı doğru yapamamadır. Ayrıca öğretmen adayları teoremin ifadesini anlasalar ve ispat içerisinde yapmaları gereken cebirsel işlemleri yapsalar dahi ispatı beklenen düzeyde tamamlayamamaktadırlar.

Bu araştırmadan yola çıkarak, cebir derslerindeki ispatların öğretiminin öğretmen adaylarının cebirsel ispat yapma durumları göz önüne alınarak ve cebirsel ispatta yaşadıkları zorlukların giderilmesi esas alınarak yapılmasının ispat öğretim sürecini iyileştireceği düşünülmektedir. Ayrıca benzer çalışmalar farklı konu alanlarında ve farklı örneklem gruplarında da yapılabilir.

Kaynaklar

Akkuş İspir O. ve Palabıyık U. (2011). Örüntü temelli cebir öğretiminin öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*(2), 111-123.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, *6*(1), 25-37.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, *35*(156), 17-31.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2010). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (6.baskı). Ankara: Pegem Yayınları.

Ceylan, T. (2012). *Geogebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Ankara Üniversitesi, Ankara.

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: kuramsal bir çalışma. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences,* 4(2), 47-71.

Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi.* Doktora tezi. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5- 23.

İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımlarını kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi.* Yüksek lisans tezi. Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma: Desen ve uygulama için bir rehber.* (Çev. S. Turan) Ankara: Nobel Yayın Dağıtım. (Eserin orijinali 2009'da yayımlandı).

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaöğretim matematik dersi 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar öğretim programı.* Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.

Moore, R. C. (1990). *College students' difficulties in learning to do mathematical proof.* Doctoral dissertation. University of Georgia, Athens.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). Principles and standarts for school mathematics, http://www.nctm.org/standards/ adresinden 11.04.2017 tarihinde edinilmiştir.

Polat, K. ve Akgün, L. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat kavramına ve ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 43, 423-438.

Sarı, M. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi.* Doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Yeşilyurt Çetin, A. (2017). *Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçleri.* Doktora tezi. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (7. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (2015). *Matematiksel düşünme* (11.Basım). İstanbul: Remzi Kitabevi.

ETİK ve BİLİMSEL İLKELER SORUMLULUK BEYANI

Bu çalışmanın tüm hazırlanma süreçlerinde etik kurallara ve bilimsel atıf gösterme ilkelerine riayet edildiğini yazar(lar) beyan eder. Aksi bir durumun tespiti halinde OJOMSTE'nin hiçbir sorumluluğu olmayıp, tüm sorumluluk makale yazarlarına aittir.

ARAŞTIRMACILARIN MAKALEYE KATKI ORANI BEYANI

1. yazar katkı oranı : %50
2. yazar katkı oranı : %50